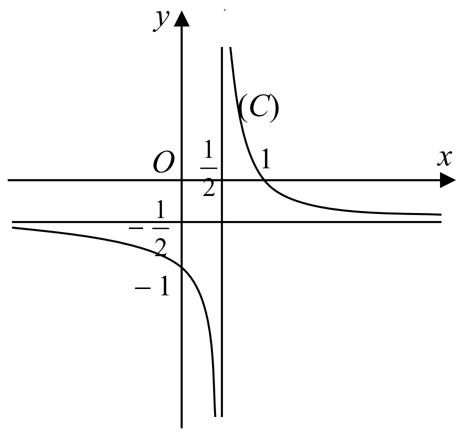
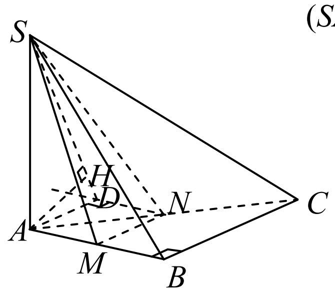
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

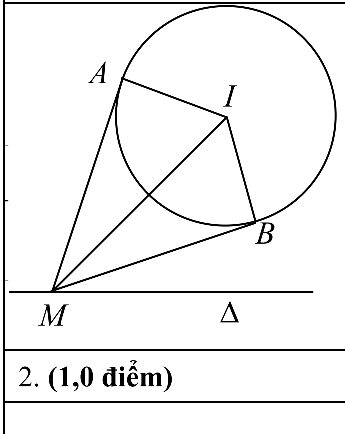
ĐỀ CHÍNH THỨC

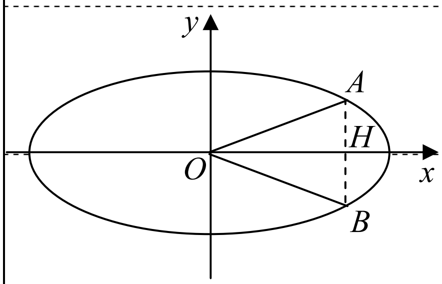
ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2011
Môn: TOÁN; Khối A
(Đáp án - thang điểm gồm 05 trang)

ĐÁP ÁN − THANG ĐIỂM

Câu	*Đáp án*	*Điểm*
I **(2,0 *điểm*)**	1. **(1,0 *điểm*)**	
	• Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. • Sự biến thiên: Chiều biến thiên: $y' = \frac{-1}{(2x-1)^2} < 0, \forall x \in D$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.	***0,25***
	Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = -\frac{1}{2}$; tiệm cận ngang: $y = -\frac{1}{2}$. $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$; tiệm cận đứng: $x = \frac{1}{2}$.	***0,25***
	Bảng biến thiên: x: $-\infty$; $\frac{1}{2}$; $+\infty$ — y': $-$ ‖ $-$ — y: $-\frac{1}{2} \searrow -\infty$ ‖ $+\infty \searrow -\frac{1}{2}$	***0,25***
	• Đồ thị: 	***0,25***
	2. **(1,0 *điểm*)**	
	Hoành độ giao điểm của d: $y = x + m$ và (C) là nghiệm phương trình: $x + m = \frac{-x+1}{2x-1}$ $\Leftrightarrow (x + m)(2x - 1) = -x + 1$ (do $x = \frac{1}{2}$ không là nghiệm) $\Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (*).	***0,25***
	$\Delta' = m^2 + 2m + 2 > 0, \forall m$. Suy ra d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt với mọi m.	***0,25***
	Gọi x_1 và x_2 là nghiệm của (*), ta có: $k_1 + k_2 = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} - \frac{1}{(2x_2-1)^2} = -\frac{4(x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1+x_2) + 2}{(4x_1x_2 - 2(x_1+x_2)+1)^2}$.	***0,25***
	Theo định lý Viet, suy ra: $k_1 + k_2 = -4m^2 - 8m - 6 = -4(m+1)^2 - 2 \le -2$. Suy ra: $k_1 + k_2$ lớn nhất bằng -2, khi và chỉ khi $m = -1$.	***0,25***

Câu	*Đáp án*	*Điểm*
II **(2,0 *điểm*)**	1. **(1,0 *điểm*)**	
	Điều kiện: $\sin x \neq 0$ (*). Phương trình đã cho tương đương với: $(1 + \sin 2x + \cos 2x)\sin^2 x = 2\sqrt{2}\sin^2 x\cos x$	***0,25***
	$\Leftrightarrow 1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2}\cos x$ (do $\sin x \neq 0$) $\Leftrightarrow \cos x(\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0.$	***0,25***
	• $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thỏa mãn (*).	***0,25***
	• $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, thỏa mãn (*). Vậy, phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.	***0,25***
	2. **(1,0 điểm)**	
	$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 & (1) \\ xy(x^2+y^2) + 2 = (x+y)^2 & (2). \end{cases}$ Ta có: (2) $\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$ hoặc $x^2 + y^2 = 2$.	***0,25***
	• $xy = 1$; từ (1) suy ra: $y^4 - 2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Suy ra: $(x; y) = (1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-1; -1)$.	***0,25***
	• $x^2 + y^2 = 2$; từ (1) suy ra: $3y(x^2+y^2) - 4xy^2 + 2x^2y - 2(x+y) = 0$ $\Leftrightarrow 6y - 4xy^2 + 2x^2y - 2(x+y) = 0$ $\Leftrightarrow (1 - xy)(2y - x) = 0 \Leftrightarrow xy = 1$ (đã xét) hoặc $x = 2y$.	***0,25***
	Với $x = 2y$, từ $x^2 + y^2 = 2$ suy ra: $(x; y) = \left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}; \dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$ hoặc $(x; y) = \left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}; -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$. Vậy, hệ có nghiệm: $(1; 1), (-1; -1), \left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}; \dfrac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}; -\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$.	***0,25***
III **(1,0 *điểm*)**	$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(x\sin x + \cos x) + x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx.$	***0,25***
	Ta có: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$	***0,25***
	và $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(x\sin x + \cos x)}{x\sin x + \cos x} = \left(\ln\lvert x\sin x + \cos x\rvert\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}$	***0,25***
	$= \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} + 1\right)\right)$. Suy ra: $I = \dfrac{\pi}{4} + \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} + 1\right)\right)$.	***0,25***
IV **(1,0 *điểm*)**	 (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với $(ABC) \Rightarrow SA \perp (ABC)$. $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC \Rightarrow \widehat{SBA}$ là góc giữa (SBC) và $(ABC) \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB\tan\widehat{SBA} = 2a\sqrt{3}$.	***0,25***
	Mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N $\Rightarrow MN // BC$ và N là trung điểm AC. $MN = \dfrac{BC}{2} = a,\ BM = \dfrac{AB}{2} = a.$ Diện tích: $S_{BCNM} = \dfrac{(BC + MN)BM}{2} = \dfrac{3a^2}{2}\cdot$ Thể tích: $V_{S.BCNM} = \dfrac{1}{3}S_{BCNM}\cdot SA = a^3\sqrt{3}\cdot$	***0,25***

Câu	Đáp án	Điểm
	Kẻ đường thẳng Δ đi qua N, song song với AB. Hạ $AD \perp \Delta$ ($D \in \Delta$) $\Rightarrow AB$ // (SND) $\Rightarrow \mathrm{d}(AB, SN) = \mathrm{d}(AB, (SND)) = \mathrm{d}(A, (SND))$. Hạ $AH \perp SD$ ($H \in SD$) $\Rightarrow AH \perp (SND) \Rightarrow \mathrm{d}(A, (SND)) = AH$.	**0,25**
	Tam giác SAD vuông tại A, có: $AH \perp SD$ và $AD = MN = a$ $\Rightarrow \mathrm{d}(AB, SN) = AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}\cdot$	**0,25**
V **(1,0 *điểm*)**	Trước hết ta chứng minh: $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} \geq \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ (*), với a và b dương, $ab \geq 1$. Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow (a + b + 2)(1 + \sqrt{ab}\,) \geq 2(1 + a)(1 + b)$ $\Leftrightarrow (a + b)\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} \geq a + b + 2ab$ $\Leftrightarrow (\sqrt{ab} - 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b}\,)^2 \geq 0$, luôn đúng với a và b dương, $ab \geq 1$. Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi: $a = b$ hoặc $ab = 1$.	**0,25**
	Áp dụng (*), với x và y thuộc đoạn [1; 4] và $x \geq y$, ta có: $P = \dfrac{x}{2x + 3y} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{z}{y}} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{z}} \geq \dfrac{1}{2 + \dfrac{3y}{x}} + \dfrac{2}{1 + \sqrt{\dfrac{x}{y}}}.$ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{z}{y} = \dfrac{x}{z}$ hoặc $\dfrac{x}{y} = 1$ (1)	**0,25**
	Đặt $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = t$, $t \in [1; 2]$. Khi đó: $P \geq \dfrac{t^2}{2t^2+3} + \dfrac{2}{1+t}\cdot$ Xét hàm $f(t) = \dfrac{t^2}{2t^2+3} + \dfrac{2}{1+t}$, $t \in [1; 2]$; $f\,'(t) = \dfrac{-2\left[t^3(4t-3)+3t(2t-1)+9)\right]}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0.$ $\Rightarrow f(t) \geq f(2) = \dfrac{34}{33}$; dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $t = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = 4 \Leftrightarrow x = 4$, y = 1 (2).	**0,25**
	$\Rightarrow P \geq \dfrac{34}{33}$. Từ (1) và (2) suy ra dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi: $x = 4$, y = 1 và $z = 2$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{34}{33}$; khi $x = 4$, $y = 1$, $z = 2$.	**0,25**
VI.a **(2,0 *điểm*)**	1. **(1,0 điểm)**	
	 Đường tròn (C) có tâm $I(2; 1)$, bán kính $IA = \sqrt{5}$. Tứ giác $MAIB$ có $\widehat{MAI} = \widehat{MBI} = 90^\circ$ và $MA = MB$ $\Rightarrow S_{MAIB} = IA.MA$	**0,25**
	$\Rightarrow MA = 2\sqrt{5} \Rightarrow IM = \sqrt{IA^2 + MA^2} = 5$.	**0,25**
	$M \in \Delta$, có tọa độ dạng $M(t; -t-2)$. $IM = 5 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t+3)^2 = 25 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 12 = 0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -3$. Vậy, $M(2; -4)$ hoặc $M(-3; 1)$.	**0,25**
	2. **(1,0 điểm)**	
	Gọi $M(x; y; z)$, ta có: $M \in (P)$ và $MA = MB = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases}$	**0,25**

Câu	*Đáp án*	*Điểm*
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \end{cases}$	***0,25***
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ z = 3y \\ 7y^2 - 11y + 4 = 0 \end{cases}$	***0,25***
	$\Leftrightarrow (x;\, y;\, z) = (0;\, 1;\, 3)$ hoặc $\left(-\frac{6}{7};\, \frac{4}{7};\, \frac{12}{7}\right)$. Vậy có: $M(0;\, 1;\, 3)$ hoặc $M\left(-\frac{6}{7};\, \frac{4}{7};\, \frac{12}{7}\right)$.	***0,25***
VII.a **(1,0 *điểm*)**	Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có: $z^2 = \lvert z \rvert^2 + \overline{z} \Leftrightarrow (a + bi)^2 = a^2 + b^2 + a - bi$	***0,25***
	$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = a^2 + b^2 + a - bi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a^2 + b^2 + a \\ 2ab = -b \end{cases}$	***0,25***
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b^2 \\ b(2a+1) = 0 \end{cases}$	***0,25***
	$\Leftrightarrow (a;\, b) = (0;\, 0)$ hoặc $(a;\, b) = \left(-\frac{1}{2};\, \frac{1}{2}\right)$ hoặc $(a;\, b) = \left(-\frac{1}{2};\, -\frac{1}{2}\right)$. Vậy, $z = 0$ hoặc $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ hoặc $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.	***0,25***
VI.b **(2,0 *điểm*)**	1. **(1,0 điểm)**	
	Gọi $A(x;\, y)$. Do A, B thuộc (E) có hoành độ dương và tam giác OAB cân tại O, nên: $B(x;\, -y), x > 0$. Suy ra: $AB = 2\lvert y \rvert = \sqrt{4 - x^2}$.	***0,25***
	 Gọi H là trung điểm AB, ta có: $OH \perp AB$ và $OH = x$. Diện tích: $S_{OAB} = \frac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}$	***0,25***
	$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2(4 - x^2)} \le 1.$ Dấu " = " xảy ra, khi và chỉ khi $x = \sqrt{2}$.	***0,25***
	Vậy: $A\left(\sqrt{2};\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2};\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $B\left(\sqrt{2};\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.	***0,25***
	2. **(1,0 điểm)**	
	(S) có tâm $I(2;\, 2;\, 2)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$. Nhận xét: O và A cùng thuộc (S). Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $r = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.	***0,25***
	Khoảng cách: $d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. (P) đi qua O có phương trình dạng: $ax + by + cz = 0,\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ (*). (P) đi qua A, suy ra: $4a + 4b = 0 \Rightarrow b = -a$.	***0,25***
	$d(I, (P)) = \frac{\lvert 2(a+b+c) \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\lvert 2c \rvert}{\sqrt{2a^2 + c^2}} \Rightarrow \frac{\lvert 2c \rvert}{\sqrt{2a^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$	***0,25***
	$\Rightarrow 2a^2 + c^2 = 3c^2 \Rightarrow c = \pm a$. Theo (*), suy ra (P): $x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$.	***0,25***

Câu	*Đáp án*	*Điểm*
VII.b **(1,0 *điểm*)**	Gọi $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, ta có: $(2z - 1)(1 + i) + (\overline{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$ $\Leftrightarrow [(2a - 1) + 2bi](1 + i) + [(a + 1) - bi](1 - i) = 2 - 2i$	***0,25***
	$\Leftrightarrow (2a - 2b - 1) + (2a + 2b - 1)i + (a - b + 1) - (a + b + 1)i = 2 - 2i$	***0,25***
	$\Leftrightarrow (3a - 3b) + (a + b - 2)i = 2 - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 3b = 2 \\ a + b - 2 = -2 \end{cases}$	***0,25***
	$\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{3},\ b = -\dfrac{1}{3}\cdot$ Suy ra môđun: $\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot$	***0,25***

------------- Hết -------------