BÀI TẬP TỔ HỢP VÀ NHỊ THỨC NEWTON

Nguyễn Việt Hùng

Bài 1. Chứng minh rằng

a) $1 + 1.P_1 + 2.P_2 + \cdots + n.P_n = P_{n+1}$;

b) $\dfrac{1}{P_2} + \dfrac{2}{P_3} + \cdots + \dfrac{n-1}{P_n} < 1$.

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$;

b) $\dfrac{1}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \cdots + \dfrac{1}{A_n^2} = \dfrac{n-1}{n}$;

c) $C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + 3\dfrac{C_n^3}{C_n^2} + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = C_{n+1}^2$.

Bài 3. a) Chứng minh rằng

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \cdots + C_{k-1}^{k-1}.$$

b) Áp dụng kết quả ở câu *a*) hãy tính các tổng quen thuộc sau

- $S_1 = 1 + 2 + \cdots + n$;
- $S_2 = 1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1)$;
- $S_3 = 1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$;
- $S_4 = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3)$;
- $S_5 = 1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 + \cdots + n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

Bài 4. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1+x^2(1-x)]^8$.

Bài 5. Tìm số hạng không phụ thuộc x trong khai triển thành đa thức của

$$a)\quad P(x) = (1 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{10}, \quad b)\quad Q(x) = (1 + x + x^2 + \frac{1}{x})^{10}.$$

Bài 6. Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức

$$(a)\quad P(x) = (2x+1)^{13}; \qquad (b)\quad Q(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{3}\right)^{14}.$$

Bài 7. (a) Tìm hệ số của số hạng chứa $x^3y^2z^2$ trong khai triển thành đa thức của $(x+2y-3z)^7$.

(b) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(1 - x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^9$.

Bài 8. Tìm số nguyên dương n để hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển $(2x+3)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ là a_{10}.

Bài 9. Tìm số hạng chứa a, b có số mũ bằng nhau trong khai triển của

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}.$$

Bài 10. Cho $P(x) = (1 + x + x^3 + x^4)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{16}x^{16}$. Tìm giá trị của a_{10}.

Bài 11. a) Tìm các số hạng nguyên trong khai triển của $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})^{11}$.

b) Trong khai triển $(\sqrt{2} - \sqrt[4]{3})^{128}$ có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

Bài 12. Chứng minh rằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{23}$ thành đa thức là một số chính phương.

Bài 13. Tìm hệ số của x^{50} trong khai triển thành đa thức

$$P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \cdots + 1000(1+x)^{1000}.$$

Bài 14. Tìm giá trị lớn nhất trong các giá trị $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2, \ldots,\ C_n^n$.

Bài 15. Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \cdots + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

Bài 16. Tính tổng

a) $S = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}$;

b) $T = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}$.

Bài 17. Tính tổng $\quad S = C_{2n}^0 + 2C_{2n}^2 + 2^2C_{2n}^4 + \cdots + 2^nC_{2n}^{2n}.$

Bài 18. Tính tổng $\quad S = C_{4n}^0 + C_{4n}^2 + \cdots + C_{4n}^{2n}.$

Bài 19. Tính tổng $\quad S = 1C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n.$

Bài 20. Tính tổng

$$S = \frac{1}{1}C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n.$$

Bài 21. Tính tổng $\quad S = 1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 + \cdots + (n-1)nC_n^n.$

Bài 22. Tính tổng $\quad S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + n^2C_n^n.$

Bài 23. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \cdots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}.$$

Bài 24. Tính tổng

$$S = \frac{1}{1.2}C_n^0 + \frac{1}{2.3}C_n^1 + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}C_n^n.$$

Bài 25. Tính tổng

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k/3}C_n^k}{3^{2k+1}}.$$

Bài 26. Chứng minh đẳng thức

$$(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 - \cdots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^nC_{2n}^n.$$

HD: Xuất phát từ đẳng thức $(1+x)^{2n}(1-x)^{2n} = (1-x^2)^{2n}$ sau đó đồng nhất hệ số của x^{2n} ở hai vế.

Bài 27. Thu gọn các tổng sau đây

1. $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \cdots + (-1)^nnC_n^n.$
2. $C_n^0 + 2C_n^1 + \cdots + nC_n^{n-1}.$
3. $C_n^2 + 2C_n^3 + \cdots + (n-1)C_n^n.$
4. $C_n^2 - 2C_n^3 + \cdots + (-1)^n(n-1)C_n^n.$

5. $\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n$.

6. $\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{3}C_n^1 + \cdots + \frac{1}{n+2}C_n^n$.

7. $\frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n$.

8. $\frac{1}{2}C_n^1 + \frac{2}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{n}{n+1}C_n^n$.

9. $C_{2n}^0 + \frac{1}{3}C_{2n}^2 + \frac{1}{5}C_{2n}^4 + \cdots + \frac{1}{2n+1}C_{2n}^{2n}$.

10. $2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + \cdots + 2nC_{2n}^{2n}$.

11. $\frac{2^2}{2}C_{2n}^1 + \frac{2^4}{4}C_{2n}^3 + \frac{2^6}{6}C_{2n}^5 + \cdots + \frac{2^{2n}}{2n}C_{2n}^{2n-1}$.

12. $1.2^2C_{2n}^2 + 2.2^4C_{2n}^4 + \cdots + n.2^{2n}C_{2n}^{2n}$.

13. $C_n^1 + \frac{2}{2}C_n^2 + \frac{3}{2^2}C_n^3 + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}C_n^n$.

14. $C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

15. $1.2.3C_n^3 + 2.3.4C_n^4 + \cdots + (n-2)(n-1)nC_n^n$.

16. $\frac{1}{1.2.3}C_n^0 + \frac{1}{2.3.4}C_n^1 + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}C_n^n$.

17. $C_{2010}^1 + \frac{1}{2}C_{2010}^3 + \frac{1}{3}C_{2010}^5 + \cdots + \frac{1}{1005}C_{2010}^{2009}$.

18. $\frac{1}{1!(2n-1)!} + \frac{1}{3!(2n-3)!} + \frac{1}{5!(2n-5)!} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!1!}$.

19. $\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \cdots + \frac{2010}{2008!+2009!+2010!}$.

20. $S = \sum\limits_{k=0}^{n} k!(k^2+k+1)$; $\quad T = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!(n+k)!}$.

Bài 28. Chứng minh đẳng thức

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k(\tan x)^{k-1} = n(1+\tan x)^{n-1}$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k(\tan x)^{2k-2} = \dfrac{n}{(\cos x)^{2n-2}}$;

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

Bài 29. Chứng minh đồng nhất thức Vandermonde

$$C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + \cdots + C_m^mC_n^{k-m} = C_{m+n}^k.$$

Bài 30. Chứng minh rằng

a) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$;

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^kC_{2n}^{n+k} = C_{3n}^n$.

Bài 31. Chứng minh rằng $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} = \dfrac{1}{2}$.

Bài 32. Chứng minh đẳng thức

a) $C_n^0C_n^k + C_n^1C_{n-1}^{k-1} + C_n^2C_{n-2}^{k-2} + \cdots + C_n^kC_{n-k}^0 = 2^kC_n^k$;

b) $C_n^0C_n^k - C_n^1C_{n-1}^{k-1} + C_n^2C_{n-2}^{k-2} - \cdots + (-1)^kC_n^kC_{n-k}^0 = 0$.

HD: Sử dụng đồng nhất thức Newton.

Bài 33. Chứng minh đẳng thức

$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{[k!(n-k)!]^2} = (C_{2n}^n)^2. \qquad (b)\quad \sum_{k=1}^{n} k(C_n^k)^2 = \frac{n}{2}C_{2n}^n.$$